



TITLE:

重力多体系の力学構造と非線形現象 (長距離力に支配された多体系自己組織化の統一的理解を目指して)

AUTHOR(S):

郷田, 直輝

CITATION:

郷田, 直輝. 重力多体系の力学構造と非線形現象 (長距離力に支配された多体系自己組織化の統一的理解を目指して). 数理解析研究所講究録 2014, 1885: 57-67

ISSUE DATE:

2014-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/195707>

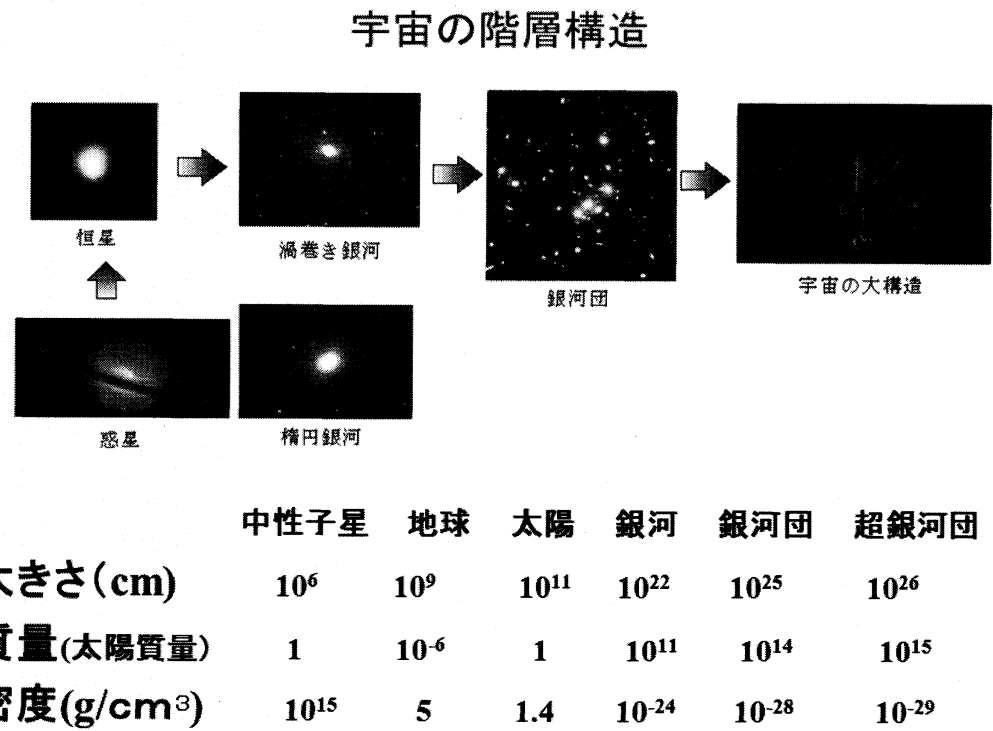
RIGHT:

重力多体系の力学構造と非線形現象

国立天文台・JASMINE 検討室 郷田 直輝
Naoteru Gouda
JASMINE Project Office,
National Astronomical Observatory of Japan

1. 宇宙の階層構造と自己重力

広大なスケールに渡って様々なタイプの天体が存在し、階層構造を形成していることが分かっている¹⁾ (図 1)。これらの天体の形成過程や力学構造等を解明することが宇宙物理学の大きな課題の 1 つである。小さいスケールからみていくと、恒星と惑星からなる系 (太陽系もその 1 つ)、(恒星が約 1000 億程度集まった) 銀河、その銀河の集団である銀河群やさらに規模が大きい銀河団、さらに銀河団が複数個連なった超銀河団が存在する。超銀河団と銀河がほとんど無いボイド (空洞) をあわせて泡のようにみえる構造は宇宙の大構造と呼ばれ、数億光年程度のサイズとなる。なお、星から宇宙の大構造に至るまで、密度にして約 44 桁も広がりがある。では一体何故、密度がオーダーでかなり異なる構造ができるのであろうか。その理由を一言でいえば、天体構造を形成する源が重力であり、そしてその重力が実際に長距離力であるためである。短距離力 (原子核内で働く強い力、さらに、電磁気力も正と負の電荷があり、力の遮蔽が起こるため、実際に短距離になる) では、その力の到達距離に見合った領域範囲で決まる密度しかもつことができないが、重力の場合は、質量を増やせば



1

図 1: 宇宙の階層構造。 恒星と惑星のシステムからはじまり、宇宙の大構造に至るまで広大なスケールにわたって、様々なサイズの天体構造が宇宙には存在している。

どこまでも力が及び大きなサイズの構造を作り、それに見合った様々な密度をとることができるのである。このように重力が宇宙の構造形成を解明する大きな鍵となる。

さて、宇宙での構造形成問題をはじめ、宇宙物理学の様々な問題を解き明かすために、既存の物理学を応用することが必要であり、それが今までも多くの天体现象の解明に役立ってきた。では、宇宙物理学は既存の物理学を単に应用するだけかといえばそうではない。逆に宇宙物理学での問題が新しい物理学を芽生えさせる可能性がある。地上の実験室系では見られない現象が宇宙では起こるからである。例えば、自己重力多体系での物理があげられる(図2)。自己重力多体系とは、その系を構成する各々の“粒子”(星などの天体)が、お互いの重力(万有引力)だけで運動しつつ、系が束縛されている場合の系である(図3)。一見、単純な系であり、その力学的な進化や緩和過程、定常状態など理解されていると思われるかもしれないが、非常に複雑な興味深い振る舞いをするのが明らかになってきており、物理的にも数学的にも解明すべき謎が多い。つまり、自己重力多体系は、後述するように地上の実験室系では見られない興味深い緩和過程や力学構造をもたらす。特に本稿では、自己重力多体系の緩和過程、(準)平衡状態などの物理的特徴について、短距離力の系との違いを中心に記述する²⁾。

§ 1. 宇宙の階層構造

宇宙の階層構造: 広大なスケールに渡り様々な天体が存在

★物理——>天体の構造形成、天体现象

★“宇宙”——>物理学: 地上の実験室系では中々見られない現象

特に、自己重力多体系の物理: 緩和過程、力学構造

§ 2. 自己重力多体系の力学構造と基礎概念

個々の天体の力学構造と形成過程は?

*力学構造: “平衡状態”での重力ポテンシャルの形や粒子の分布(密度、速度、エネルギー)

“単純な”系である自己重力系を考える

◎自己重力多体系

系の構成粒子(天体)が、お互いの万有引力によって運動し、束縛されている系

これらの系での力学構造を中心に今後考える

(天文学的に)詳細な形成過程は考えない

特に、緩和過程、(準)平衡状態とその安定性など(単なる熱平衡化ではないもの)

==>重力多体系の“自己組織化”

10

図 2: 宇宙の階層構造と自己重力多体系の物理。

図 3: 自己重力多体系の概念と力学構造。

2. 自己重力多体系の力学構造

自己重力多体系の身近な例は、太陽系である。ニュートン力学では2体だけの場合の万有引力による運動は、解析的に解ける(ケプラー運動)。しかし、実際の太陽系は、惑星を複数個含み、厳密には2体ではなく、多体系である。3体からなる系の運動の研究が行われたが、ほとんどの場合で非常に複雑な運動を描くことが分かってきた。まさにカオス研究につながるものである。ただ、太陽系の場合は、太陽の質量に比べて惑星の質量は非常に小さいので、惑星の運動は、太陽とその惑星の2体問題として解いた場合で良い近似となる。ただ、ラプラスやポアンカレの研究によると、その太陽系でさえ、厳密には非常に複雑な振る舞いをするのが分かってきた³⁾。惑星の楕円軌道も実際には他の惑星からの重力を受けて微小ではあるが複雑に変化していく。また、非常に高い確率で太陽系は、壊れない、つまり力学的にほぼ安定であるが、壊れる可能性はゼロではない。厳密には完全に安定かどうか分からない、ということが分かってきた³⁾。

以上のように太陽系でさえ、複雑な振る舞いをする。質量が等価な3体であれば、カオス軌道にもなり複雑な運動をする。では、星が約1000億個も集まった(さらに、ダークマターも存在する)銀河では、星は一体どのような軌道を描き、そして全体としてどのような力学状態になっているのだろうか? また、どのような緩和過程を経てそのような力学状態に至ったのであろうか?

3. 銀河と力学構造

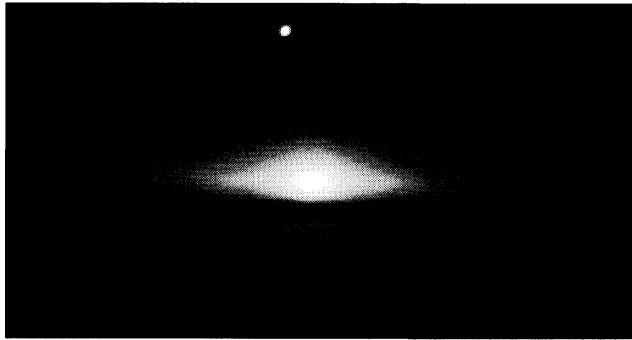


図 4: 円盤銀河。中心付近の明るいふくらみがある構造はバルジと呼ばれている。

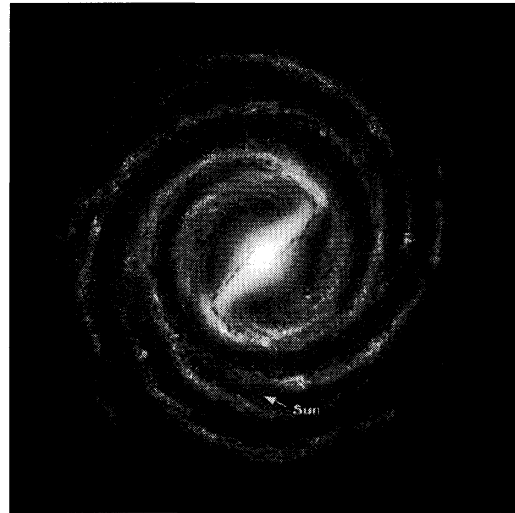


図 5: 天の川銀河。観測にもとづく想像図

銀河の力学構造がどのようになっているのか、実は我々が住む天の川銀河でさえ、詳細にはまだ分かっていない。いくつかのモデルの提唱や N 体計算による数値シミュレーションの解析は多く行われているが、現実の力学構造はまだ知られていない。ただ、銀河は楕円銀河や渦巻き銀河（図 4、5）といったいくつかのタイプがあるが、タイプ毎に（個々の銀河が生まれた時期は異なっても現在は）共通の物理的特徴（星の分布など）がある⁴⁾。従って、理由はまだ分からないが、銀河はなんらかの緩和過程を受けて、完全な定常状態ではないにしても、ある種の準定常状態になっている

ると考えられる。しかも観測によると楕円銀河の構造、そして渦巻き銀河の中心にあるバルジ構造（図 4~6）は、3 軸不等楕円体構造（バー構造になっている場合が多い）であり、主に規則的な軌道（図 7 のような軌道群、もしくはこれらをベースとした軌道群）で構成されている可能性が高い。3 体でさえカオスになるのに多数の星やさらにはダークマター

図 7: 楕円銀河やバルジなどの 3 軸不等楕円体構造を構成する星やダークマターの規則的な軌道候補。

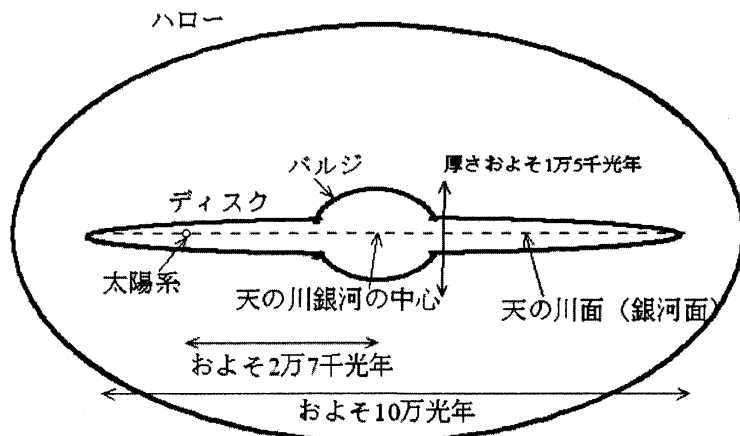
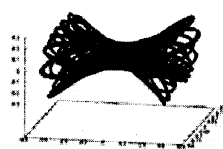
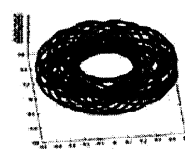


図 6: 天の川銀河の構造とサイズ。



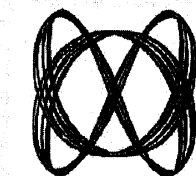
箱形軌道



ループ軌道



バナナ軌道



魚軌道

まで存在する銀河で軌道は本当に規則的なのだろうか？ このように、どのような緩和過程を経て、どのような力学状態に落ち着くのかが大きな課題となっている。

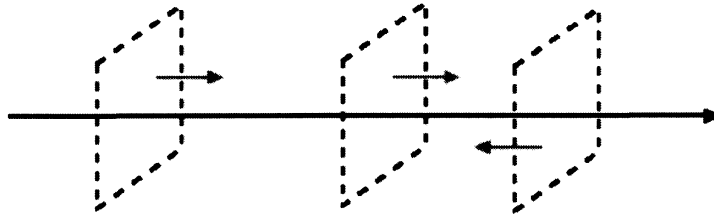
4. 1次元シート多体系の緩和過程とカオスの遷移

筆者等は現実の銀河といった3次元系ではなく、1次元シート多体系とよばれる、無限に広がったようなシートが複数枚存在し、シート面に垂直な方向のみ1次元的に運動する系を最初のステップとして解析した^{2, 5)} (図8)。この系を先ず考えたのは高精度での数値実験が可能であること、位相空間がコンパクトであるので取り扱いやすいこと、そして自己重力という長距離力の系の物理的特徴は研究することができるからである(力は定数になるが、その値は、考えているシートが全体の中で左から何枚目にあるか、といった情報に依存しており、隣同士ではなく、全体的な構造で力の大きさが決まる)。

★1次元重力シート多体系による解析

----- Sheet Systems -----

N identical plane-parallel mass sheets, each of which has uniform mass density and infinite in extent in the vertical direction of the moving



★Advantages (Hamiltonian: $H = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^N v_i^2 + (2\pi G m^2) \sum_{i < j} |x_j - x_i|$)

○Phase space is compact, which makes the system tractable in considering ergodicity

○The evolution of the system can be followed numerically with a good accuracy.

○We can study the properties induced by long range forces even in the 1-D systems.

37

図8: 1次元重力シート多体系。

数値解析の結果、シート系は以下のような非常に複雑な進化をすることが分かった(図9)。

- (1) 力学的時間スケール T_c で力学平衡(ビリアル平衡)になる。
- (2) 時刻 $t \sim NT_c$ (N は、シート数)で、系はエネルギー等分配が成立し、系は“準平衡状態(QE)”になる。
- (3) $t \sim 10^4 NT_c$ で系のグローバルなエネルギー分布関数は変化し、“遷移状態(TS)”と名付けた新たな状態に移行する。
- (4) 再度、準平衡状態に戻るが、以前の準平衡状態とは厳密には異なる様態となる。さらに、次は別の遷移状態に変化する。このような状態の遷移を繰り返していくが、同じ状態にはならない。
- (5) $t \sim 10^6 NT_c$ で、長時間平均をとるとミクロカノニカル分布に一致する。つまり、エルゴード性が成立する。

◎緩和過程とカオスの遍歴

Complicated approach to “thermalization”

Initial state \longrightarrow (virial equilibrium: ビリアル平衡, $\tau \sim t_c$) \longrightarrow

Microscopic relaxation: energy equipartition (エネルギー等分配)
 “quasi-equilibrium state(QE)(準平衡状態)” $\tau \sim N t_c$

\longrightarrow **Macroscopic relaxation: transit state(TS)**

e.g. $\tau \sim 10^4 N t_c$ (遷移状態)

\longrightarrow QE \longrightarrow TS \longrightarrow QE \longrightarrow ----- \longrightarrow

thermal equilibrium(long time average=ensemble average)

\longrightarrow **microcanonical distribution** (ミクロカノニカル分布)

$\tau \sim 10^6 N t_c$ (t_c : crossing time, the typical time in which a sheet crosses the system³⁸)

図 9: 1 次元重力シート多体系の“緩和”に至る複雑なプロセス。

上記の状態遷移に関しては、ある遷移状態に滞在している時間の分布は、時間の -2 乗に比例していることが分かった。また、ある準平衡状態に滞在している時間の分布もベキ分布であるが、指数が異なり -0.5 乗となる。このようにベキ分布になるというのが重要な特徴である。実は、このような状態の遷移と滞在時間のベキ分布というのは、“安定カオス”⁶⁾とよばれる状態と共通の特徴である。

このような特徴が現れるのは、 $2N$ 次元位相空間で、系をある状態に留めおく、“バリア”(トーラスのようなもの)が存在し、系があるバリア内にあるときは、ある状態をと

り、時間が経つと、違うバリア領域に移り渡って違う状態をとっていくと推測される(図 10)²⁾。このバリアのサイズがもしフラクタル分布をしていれば、滞在時間がベキ分布をすることが理解できる。また、エルゴード性が成立する時間スケールは、バリアの中でもっとも大きなサイズで決まるのかもしれない。

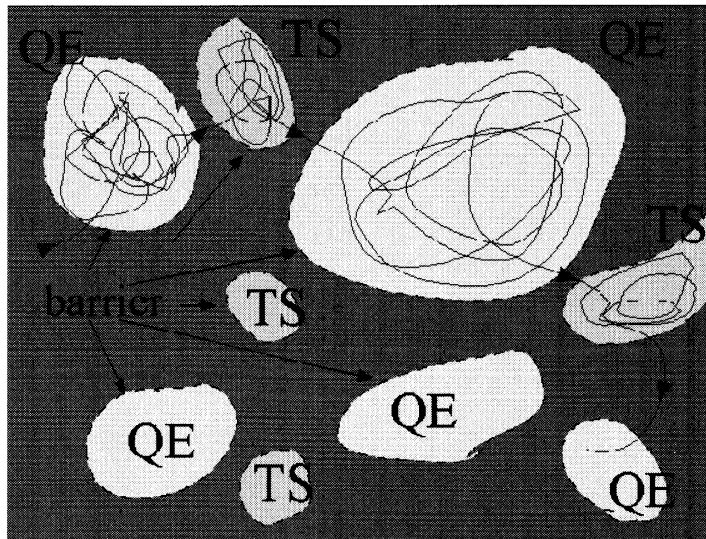


図 10: ($2N$ 次元)位相空間中での軌道(系全体の状態の進化をあらわす)の概念図。

なお、この遷移過程は、他の系でも見られるカオスの遍歴⁷⁾と共通点が多い。カオスの遍歴では、秩序状態と乱れた状態がお互いに入れ替わりつつ遷移が継続して起こるものであるが、この遷移が起こる原因は、系の中に乱雑性を引き起こす“局所的な力”と、系の規則化を促す“平均場”の両方が含まれ、その2つの力が均衡していることによる。1次元シート系では、実はシート数 N を増やすとリアプノフ指数の値がゼロに近づき、カオス性が薄れることが分かっている^{2,5)}。つまり、 N を大きくすると平均重力場が支配的になるからである。しかし、有限の N では、シート数の離散性による平均場からのずれが、乱雑を引き起こす源であり、平均場との均衡が複雑な遷移をもたらすと考えられる。

さて、 N を大きくするとカオス性が薄れていくのは、現実の3次元系でも同様と考えられる。つまり、 N が大きくなるとカオスの原因となる、近くの星同士の重力散乱の効果に比べて、多数の星による平均重力場の効果が大きくなるからである。従って、現在の楕円銀河やバルジが規則的な軌道(図7の軌道群やそれをベースとした軌道群)で構成されている、もしくは、安定カオスのように、厳密にはカオスだが、長時間にわたり近似的に規則的な軌道とみなせる軌道でほとんど構成されていると考えるのがもっともらしいと思われる。では、一体、現実の銀河の力学構造はどうなっているのだろうか？それは、観測によって調べなければならない。詳細は、次章で記述する。

5. JASMINE(赤外線位置天文観測衛星)計画で探る天の川銀河の力学構造

自己重力多体系の力学構造の今後の発展としては、理論(カオス、複雑系なども)、実験(数値シミュレーション)の進展も必要であるが、自然科学である以上、現実の系がどのようなになっているかを知ること重要である。その系として近未来に詳細かつ精密に分かる可能性があるのが、唯一、我々が住む天の川銀河である(他の銀河は遠すぎて、個々の星の3次元分布や3次元速度の情報を知るのは困難であるため)。力学構造を知るためには、星の3次元分布と運動情報が必要となるが、その測定を行う天文学の一分野

1. 位置天文学とは? ~その重要性~

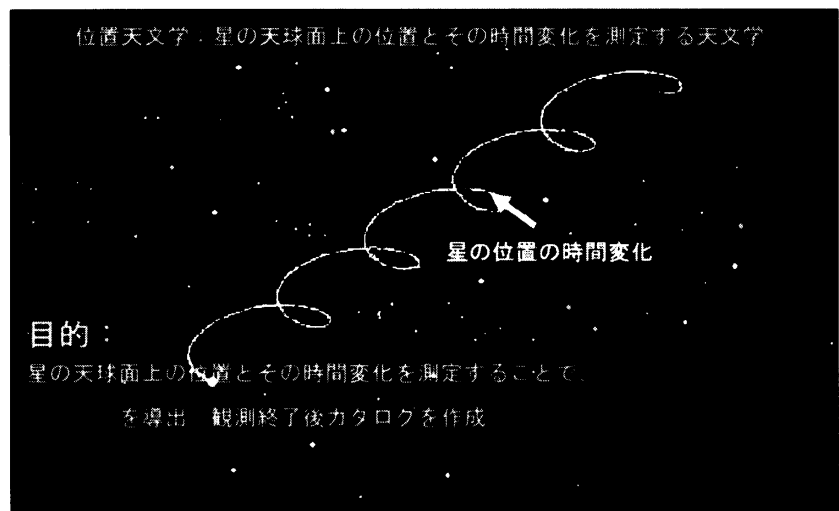


図 11: 位置天文学について。

が位置天文学である。位置天文学は、星(恒星)の天球面上の位置とその時間変化の測定を行う(図11)。すべきことは単純であるが、星の動きはごくわずかであり、その動きを精度良く測定するためには、観測の工夫、精密測定できる観測装置の開発・製作、データ解析方法の工夫など様々な研究開発を要する。

星の動きを知ることによって何が分かるかという点、まず星までの距離を三角測量によって直接的に測定できる(図12)。さらに、天球上の星の直線運動(固有運動)により、星独自が重力の影響によって動いている運動速度を知ることができる(図13)。なお、天球上の星の動きは、一般的には、地球公転に伴う星のみかけの年周楕円運動(図12)と固有運動にともなう直線的な動き(図13)が組み合わされて、らせん運動を行う(図11)。このようにして、星の3次元的位置と運動が分かれば、その背景にある重力場の情報が推測できる。すると、

その重力場をつくりあげている全重力物質の位相空間分布や軌道情報までが推測できる。見えている星の寄与を除けば、“見えていない” 暗い星やダークマターの位相空間分布までもが推測できるのである (図 14)。なお、日本では、筆者を中心に赤外線位置天文観測衛星 (JASMINE) 計画^{1), 8)}を推進していることを詳細な説明は割愛するが付記しておく (図 15~19)。

— 年周視差とは —

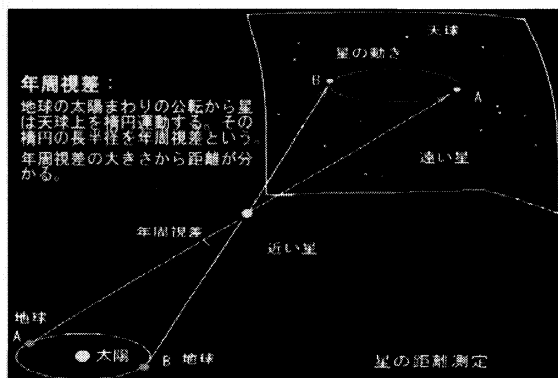


図 12 : 年周視差により星までの距離がわかる。

— 固有運動とは —

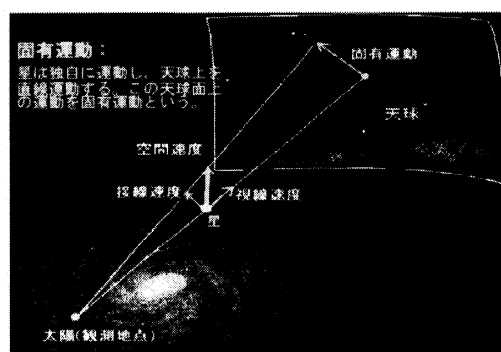


図 13 : 固有運動に距離をかけると星の接線速度が求まる。視線速度は別の観測によって求まる。

位置天文学の重要性

距離→星の3次元立体地図

さらに、見えないものが“見られる”！！

ダークマター等の分布、軌道 → 銀河の構造、形成史、力学構造の物理などへも影響

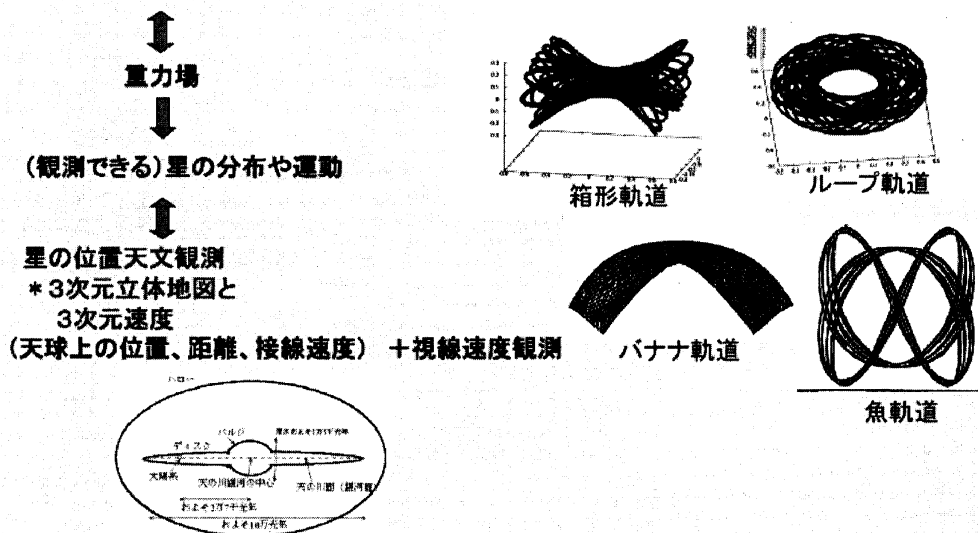


図 14 : 星の3次元立体地図と3次元速度の情報により、“見えない”物質の位相空間分布、軌道までもが推定できる。

JASMINE計画シリーズ

JASMINE: 赤外線位置天文観測衛星

年周視差、固有運動など天文学、天体物理学の様々な分野での基本となる情報を画期的な精度で提供。さらに世界的にユニークな近赤外線での位置天文観測を活かし、可視光観測では困難な銀河系中心付近、バルジ、星形成領域をターゲットとする。

3段階のステップでアプローチ：＊科学的成果の段階的進展

＊技術的ノウハウの蓄積、経験を積む

Nano-JASMINE

主鏡口径5cm
～3mas 全天サーベイ
zw-band(0.6～1.0ミクロン)
打ち上げ：2015年
衛星重量：35kg

日本初のスペースアストロトリの経験。
衛星開発+打ち上げ：1億円程度、
ウクライナのロケットでブラジルから打ち上げ

- 単独ではヒッパルコス程度の精度。ヒッパルコスと組み合わせると、固有運動精度は1桁程度向上
- 太陽系近傍のダークマター分布、ダークマターの正体、星形成、星団の物理など

小型JASMINE

主鏡口径30cm級
10 μ as程度 特定領域のサーベイ
Hw-band(1.1～1.7ミクロン)
打ち上げ目標：2019年頃
衛星重量：～400kg

銀河系中心近くのバルジの星の位置天文情報を世界で初めて得る。

- JAXA宇宙研の宇宙科学小型計画枠に
応募予定：高精度狭領域位置天文観測は、小型科学衛星が最適。
- 世界に先駆けて、銀河系中心付近でのバルジ構造、星形成史、巨大BBの進化などの研究進展を目指す
- X線連星の軌道要素決定、系外惑星などの特定天体もターゲットにする。

(中型)JASMINE

主鏡口径80cm級
10 μ as程度 広領域サーベイ
Kw-band(1.5～2.5ミクロン)
打ち上げ目標：2020年代
衛星重量：～1500kg

100万個レベルのバルジの星の位置天文情報
○測定精度は、小型JASMINEと同様

- バルジ方向の20度×10度をサーベイする。
- 小型JASMINEでの観測回数や領域が小さいことを補い、統計精度を向上
- 全面的な国際協力や国内の他の計画とのマージも視野

図 15: JASMINE 計画シリーズ

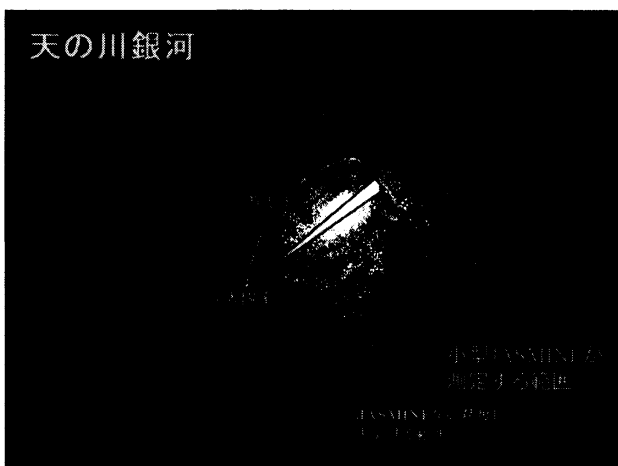


図 16: JASMINE 計画シリーズで観測サーベイする領域(天の川銀河を上から見た図)。

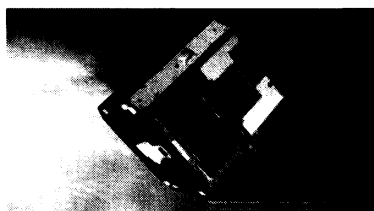


図 17: 2015 年打ち上げ予定の超小型衛星 Nano-JASMINE のイラスト。



図 18: 完成した Nano-JASMINE 衛星の打ち上げ実機。

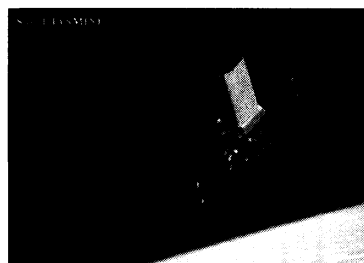


図 19: 小型 JASMINE 衛星のイラスト。

なお、観測データから、実際に銀河の力学構造、つまり、星やダークマターなど重力を作り出す、すべての物質の位相密度分布関数を導き出すのは、実は容易ではない。観測されるのは、有限の（明るい）星であり、暗い星やダークマターの情報は得られない。ただ、もしも、観測から加速度（力）を測定できて、それを通じて重力ポテンシャルが分かれば、ポテンシャルを作り出すもととなった、全重力物質の密度分布、さらには、数値計算を介すが、その重力ポテンシャル中での軌道情報から位相分布関数の構築が可能である。しかし、位置天文観測から分かるのは、位置と速度の情報のみであり、加速度は測定できない（加速度を測定出来るまでの精度を出すのは、一般的には非常に困難）。そこで、あらかじめ考え得る範囲で、様々な重力ポテンシャルを想定し、そのポテンシャル中での位相分布関数を理論的に導出しておく（テンプレート）。そして、観測データが出た際には、位相分布関数のテンプレートと観測データを比較する。位相分布関数は、ある場所にある速度で存在する確率も意味するため、観測できる星もこの位相分布関数に従った確率で存在しているはずである（注：実際には、観測ターゲットは、ある基準で選択されているため、その選択効果を考慮しなければならない）。そこで、どの位相分布関数による存在確率にもっとも観測データ（実際の星の存在割合）があっているのか、それを統計的に解析して、一番適合するテンプレートを選び出す。そのテンプレート、つまり、位相分布関数や重力ポテンシャルが、最もらしいと結論することができる。

以上のようにして、観測データから全重力物質の位相分布関数を決めていく作業を行う。ただ、そのためには、仮定した重力ポテンシャルのもとで、その系での位相分布関数を自己無矛盾的に理論的に構築しなくてはならない。その構築方法は、まだ研究が進展中であり、完成はされていない。基本的には、定常状態を仮定した場合、位相分布関数は、その系の運動の積分量（保存量）のみ依存すること（ジーンズの定理ないしは、強いジーンズの定理）を利用する。つまり、重力ポテンシャルが与えられたハミルトン系での積分量をみつけ、その積分量と星の位置と速度との関係を導き出すことを行う（トーラスあてはめ法）。次に、ある積分量をもった星（トーラス）の重み因子（つまり、位相分布関数）を、例えば、made to measure 法という様々な星の実際の軌道を計算することをベースとした方法を用いて導出することを行う。まだ、3次元系での位相分布関数の構築は完成しておらず、研究が進行中ではあるが、これらの方法は、自己重力系のみならず、他の系や他分野にも応用が可能と考えている。

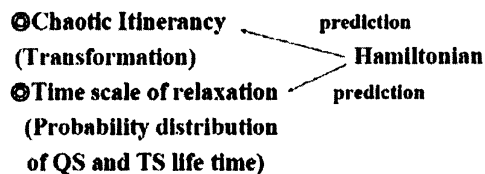
以上の方法の詳細は、本講究録の上田晴彦氏と矢野太平氏の記事を参照願いたい。

6. 新しい統計力学の構築に向けて

1次元シート系では、数値解析により、複雑な遷移現象を経て、非常に長時間後にエルゴード性が成立すること、シート数を増やすとカオス性が薄れ、緩和時間が長くなること、また、エルゴード性が成立後も状態は遷移を続けることが分かってきた。これらの特徴は、地上で見られる気体といった短距離力が支配する系とは全く異なる。気体では、分子数が増えれば増えるほど、早く緩和し、ミクロカノニカル分布に近づくのみである。そのため、短距離力の系では緩和後の巨視的状态が予測可能となり統計力学が勝利をおさめた。しかし、重力といった長距離系の場合は、単純ではない。ただ、長距離力系といえども、古典ハミルトン系であり、ハミルトニアンにすべての情報が含まれているはずである。何か長距離力の緩和過程と(準)平衡状態に関して予測はできないのであろうか？いわば、長距離力系の統計力学と呼ぶのがふさわしい新しい物理学の構築が必要だと思われる。それには位相空間の幾何学的、測度論的議論が鍵になると考えている（図 20）。なお、長距離力系は重力系以外でも非中性プラズマやビーム物理学の分野においても関連している。これらの系は、ボルツマン方程式+ポアソン方程式という系の進化を司る方程式も共通する。そのため、現象に関しても共通点がみられる場合もあり、現象の統一的理解が可能かもしれない。さらに、非線形集団運動、カオス、長距離力系の統計力学に関する基礎科学の発展につながるかもしれない（図

★ 集団運動の規則性

- * 1次元自己重力系での巨視的な状態の変化を
“集団運動”と呼ぶことにする



重力多体系における集団運動の規則性を何らかの法則で予測できないか？

図 20 : 集団運動の規則性と新しい統計力学の必要性

★ 集団運動の規則性

- ③ 通常の気体など → 粒子数大(大自由度) →

軌道はカオス(予測不可能) →

しかし、大自由度が幸いして、緩和後の巨視的な系の状態を予測可能(統計力学の勝利)

- ③ 1次元重力系

○ 大自由度になればなるほど、カオス性は薄れる:

・ 緩和時間が長くなる

・ 有限の自由度では、カオスと規則性との競合により複雑な遷移現象を起こす

○ エルゴード性が成立し、長時間平均=位相平均が成り立っても、系全体の分布は熱平衡分布には留まらない

★ 集団運動を予測する法則は何か？

位相空間での幾何学的、測度論的な解析が必要では？！

新しい“統計力学”の必要性

21, 22 参照)。また、これらは当然、数学とも密着し(数学の“言葉”が必要)、数学との協力は必要不可欠である。分野を超えた相互協力を是非期待したい(図 21、22 参照)。

図 21 : 自己重力系での解析方法の他分野への応用。また他分野でみられる様々な現象の統一的理解の必要性和重要性。

★ 解析手法の相互適用

○ 平衡状態の構築(Torus fitting法+重み因子法)

○ 平衡解の安定性の解析

電磁ポテンシャルや外場

○ 緩和過程の解析

入りの系にも適用可能

★ 現象の統一的理解

非線形集団運動、カオス、長距離力系の統計力学など

➡ 基礎物理学の発展へ

古典ハミルトン系における位相空間での幾何学的、測度論的な解析

➡ 応用科学の進展へ(次世代加速器など)

数学とも密着。数学との協力も必要不可欠



図 22: 古典多体系研究ネットワーク

参考文献

- 1) 郷田直輝：「天の川銀河の地図をえがく」、旬報社、2009.
郷田直輝：「ダークマターとは何か」、PHPサイエンス・ワールド新書、2012.
- 2) 郷田直輝：重力多体系での自己組織化、J.Plasma Fusion Res, 87, pp.441-448, 2011.
郷田直輝：「自己重力多体系の物理」、数理科学、2000年3月号.
- 3) 丹羽敏雄：「数学は世界を解明できるか」、中公新書、1999.
- 4) 谷口義明・岡村定矩・祖父江義明編：シリーズ現代の天文学「銀河 I」、日本評論社、2007.
- 5) T.Tsuchiya, T.Konishi and N.Gouda, Physical Review E, 50, 2607, 1994.
T.Tsuchiya, N.Gouda and T.Konishi, Physical Review E, 53, 2210, 1996.
T.Tsuchiya, N.Gouda and T.Konishi, Astronomy and Space Science, 257, 319, 1997.
- 6) 相沢洋二・原山卓久：「カオスを視る」、別冊・数理科学、1998年10月号.
- 7) 金子邦彦・津田一郎：「複雑系のカオス的シナリオ」、朝倉書店、1996.
- 8) JASMINE 計画：<http://www.jasmine-galaxy.org/index-j.html>